

# Eine Beschreibung der Nichteindeutigkeitsmenge für die beste Approximation in der Euklidischen Ebene

K. BARTKE UND H. BERENS

*Mathematisches Institut der Universität Erlangen-Nürnberg,  
D-8520 Erlangen, West Germany*

*Communicated by Oved Shisha*

Received July 26, 1984

The authors attempt to describe the non-uniqueness set for best approximation in the Euclidean plane. © 1986 Academic Press, Inc.

## 1

$\mathbb{R}^n$  bezeichnet den  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und Norm  $|\cdot|$ .

Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$ , abgeschlossen,  $\neq \emptyset$  und  $\neq \mathbb{R}^n$ . Wir bezeichnen mit  $d_K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  die Distanzfunktion zu  $K$  und mit  $P_K: \mathbb{R}^n \rightarrow K$  die metrische Projektion, eine im allgemeinen mengenwertige Funktion,  $\Phi_K: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\text{co}} K$  ist definiert durch  $\text{co } P_K$ . Es ist bequem,  $P_K$  mit ihrem Graphen in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  zu identifizieren, so ist  $(x, k) \in P_K$  gleichbedeutend mit  $k \in P_K(x)$  und  $P_K^{-1} = \{(k, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n: (x, k) \in P_K\}$ . Entsprechendes gilt für  $\Phi_K$ . Für ein  $x \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet schließlich  $b_K(x)$  die Distanzkugel von  $x$ , es ist dies die offene Kugel um  $x$  mit Radius  $d_K(x)$ .

$E_K$  sei die Eindeutigkeitsmenge bzgl.  $K$ ,  $N_K$  ihr Komplement und  $S_K$  das Skelett von  $K$ : Für  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  definiert die Inklusion  $b_K(x) \subset b_K(x')$  eine Teilordnung auf  $\mathbb{R}^n$ .  $S_K$  ist die Menge aller maximalen Elemente von  $\mathbb{R}^n$  bzgl. dieser Teilordnung. Der Begriff wurde im Jahre 1965 von L. Calabi eingeführt (siehe L. Calabi und W. E. Hartnett [6]), hat aber seinen Ursprung in Untersuchungen von Th. Motzkin [9, 10].

Offenkundig gilt

$$1.1. \quad N_K \subset S_K,$$

\*  $\mathbb{R}^+$  und  $\mathbb{R}^-$  bezeichnen die nicht negativen bzw. nicht positiven reellen Zahlen,  $\mathbb{R}_e^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ .

und

$$1.2. \quad S_K \subset \overline{N_K}$$

ist eine Formulierung des Satzes von Bunt; denn  $N_K = \emptyset$  impliziert  $S_K = \emptyset$ , woraus mit Hilfe der Trennungssätze die Konvexität von  $K$  folgt.

Im Jahre 1969 hat E. Asplund [2] darauf aufmerksam gemacht, daß  $\Phi_K$  das Subdifferential der stetigen, konvexen Funktion

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \varphi_K(x) = \frac{1}{2} \{ |x|^2 - d_K^2(x) \} = \sup \{ \langle x, k \rangle - \frac{1}{2} |k|^2 : k \in K \}$$

ist. Hieraus ergibt sich mittels des Satzes von Reidemeister

$$1.3. \quad N_K \text{ ist eine Lebesguesche Nullmenge im } \mathbb{R}_n,$$

ein Ergebnis, das wohl zuerst von P. Erdős [7] im Jahre 1945 bewiesen wurde.

Für  $0 \leq m \leq n$  sei

$$N_K^{m,n} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \dim \Phi_K(x) \geq n - m \}.$$

Aus den Untersuchungen von R. D. Anderson und V. L. Klee, Jr. [1] von 1951 über konvexe Funktionen und oberhalbstetige Kollektionen schließt man unmittelbar:

1.4. Für  $0 \leq m \leq n$  ist  $N_K^{m,n}$  eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen von endlichem,  $m$ -dimensionalem Hausdorffmaß,

womit sie u.a. ein von Erdős gestelltes Problem beantworteten.

Für die Euklidische Ebene hat schon früher Chr. Pauc [12] in seinen Betrachtungen über die Distanzfunktion einer ebenen Punktmenge von 1939 festgestellt:

1.5.  $N_K^{1,2}$  ist in einer abzählbaren Vereinigung von rektifizierbaren Kurvenstücken enthalten

und

1.6.  $N_K^{0,2}$  ist abzählbar.

De Mises hatte 1937 gezeigt, daß die Distanzfunktion auf  $\mathbb{C}K$  eine Richtungsableitung besitzt—für ein  $x \in \mathbb{C}K$  und für eine Richtung  $e$  folgt aus der Darstellung von  $\varphi_K$

$$d'_K(x; e) = \inf \{ \langle x - \eta, e \rangle : \eta \in \Phi_K(x) \} / d_K(x).$$

Pauc hat  $d'_K$  als Integranden eines Variationsproblems interpretiert.

Wir möchten an die Ergebnisse von Pauc anknüpfen, dabei fußen unsere Überlegungen wesentlich auf dem folgenden Anfangswertproblem:

**1.7. AWP.** Für ein  $x \in \mathbb{C}K$  existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto u(t; x)$  von

$$\dot{u} \in u - \Phi_K(u), \quad u(0; x) = x. \quad (*)$$

Für jedes  $t \in \mathbb{R}^+$  existiert  $\dot{u}_+(t; x)$  und

$$\dot{u}_+(t; x) = (I - \Phi_K)^0(u(t; x)) := u(t; x) - P_{\Phi_K(u(t; x))}(u(t; x)),$$

$\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \dot{u}_+(t; x)$  ist rechtsseitig stetig und

$$|\dot{u}_+(t; x)| \leq e^t |(I - \Phi_K)^0(x)|.$$

$\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto d_K^2(u(t; x))/2$  ist lokal absolut stetig und

$$\frac{d}{dt} d_K^2(u(t; x))/2 = |\dot{u}_+(t; x)|^2.$$

$\Phi_K$  ist ein maximal monotoner Operator auf  $\mathbb{R}^n$  im Sinne der Theorie der monotonen Operatoren im Hilbertraum, siehe H. Brezis [4]. Das AWP 1.7. kann direkt aus den Sätzen der Theorie gefolgert werden—es gilt sogar im Rahmen eines beliebigen, reellen Hilbertraumes, siehe H. Berens [3]. Für den Euklidischen Raum ist der Beweis unschwer nachzuvollziehen.

Ist  $x \in \mathbb{E}_K$ , dann hat das AWP 1.7 die Lösung

$$u(t; x) = k + e^t(x - k), \quad k = P_K(x) \text{ und } t \in \mathbb{R}^+,$$

solange sie sich in  $\mathbb{E}_K$  bewegt. Hierauf hat H. Federer [8] in seiner Arbeit über Krümmungsmaße von 1959 im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über Mengen mit positivem Eindeutigkeitsbereich hingewiesen und u.a. einen weiteren Beweis des Buntschen Satzes gegeben—offenbar folgt aus dem Gesagten:  $\mathring{\mathbb{E}}_K \cap \mathbb{S}_K = \emptyset$ , also  $\mathbb{S}_K \subset \mathbb{N}_K$ .

Für die Fixpunktmenge

$$\mathbb{F}_K = \{x \in \mathbb{R}^n: x \in \Phi_K(x)\},$$

eine abgeschlossene Teilmenge im  $\mathbb{R}^n$ , hat das AWP 1.7 nur die triviale Lösung. Hier versagt es als ein technisches Mittel, diese Menge zu beschreiben.

Ogleich das Anfangswertproblem im  $\mathbb{R}^n$  gültig ist, sind unsere Überlegungen in wesentlichen Punkten auf die Euklidische Ebene beschränkt.

In den folgenden fünf Abschnitten beschreiben wir die Punktmenge  $\mathbb{N}_K \setminus \mathbb{F}_K$ , in den letzten beiden  $\mathbb{N}_K \cap \mathbb{F}_K$  bzw.  $\mathbb{N}_K$ .

Wir möchten uns an dieser Stelle bei Dr. L. Hetzelt bedanken, der uns auf die Arbeiten von L. Calabi und W. E. Hartnett aufmerksam gemacht hat.

2

Im folgenden sei  $K$  eine kompakte, nicht leere Teilmenge im  $\mathbb{R}^2$ . Obgleich die Kompaktheit nur in einigen speziellen Situationen von Wichtigkeit ist, werden wir uns ohne große Beschränkung der Allgemeinheit (o.g.B.d.A.) auf diesen Fall beschränken.

Sei  $x \in \mathbb{N}_K \setminus \mathbb{F}_K$  und sei  $u$  Lösung des zugehörigen AWP. Aus der Existenz der rechtsseitigen Ableitung  $\dot{u}_+$ , ihrer rechtsseitigen Stetigkeit und den Abschätzungen

$$|\dot{u}_+(t; x)| \leq e^t |\dot{u}_+(0; x)| < e^t d_K(x)$$

und

$$d_K(x) \leq d_K(u(t; x)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

folgt die Existenz eines Punktes  $T \in \mathbb{R}_e^+ \setminus \{0\}$ , sodaß  $u(t; x) \in \mathbb{N}_K \setminus \mathbb{F}_K$ ,  $0 \leq t < T$ , gilt.

Wir definieren  $[0, T) \ni t \mapsto \eta(t; x)$  durch

$$\dot{u}_+(t; x) = u(t; x) - \eta(t; x),$$

$[0, T) \ni t \mapsto k_l(t; x), k_r(t; x) \in P_K(u(t; x))$  durch

$$\eta(t; x) = \{k_l(t; x) + k_r(t; x)\} / 2$$

und die Forderung, daß  $(k_r(t; x) - k_l(t; x), u(t; x) - \eta(t; x))$  ein Rechtssystem auf  $\mathbb{R}^2$  bilden, und als  $[0, T) \ni t \mapsto \alpha(t; x), C(t; x)$  und  $\Delta(t; x)$  den Winkel, den offenen Kegel bzw. das offene Dreieck, der bzw. das von  $k_l(t; x), u(t; x)$  und  $k_r(t; x)$  aufgespannt wird (Fig. 1).

Aus der rechtsseitigen Stetigkeit von  $\dot{u}_+$  folgt die von  $\eta, k_l, k_r$  und  $\alpha, C,$  und  $\Delta$ . Da für  $0 \leq t' < t'' < t < T$  die Inklusionen  $C(t'; x) \cap b_K(u(t; x)) \subset$

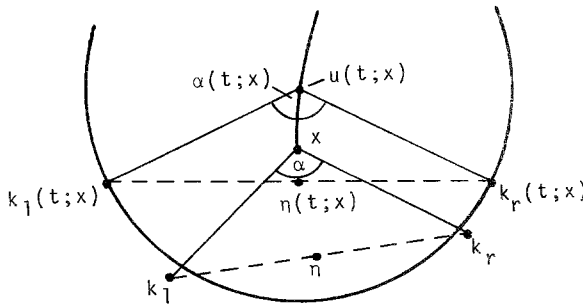


FIGURE 1

$C(t''; x) \cap b_K(u(t; x)) \subset C(t; x) \cap b_K(u(t; x))$  gelten, existieren die linksseitigen Grenzwerte  $\lim_{t' \rightarrow t-} k_l(t'; x)$  und  $\lim_{t' \rightarrow t-} k_r(t'; x)$  und damit auch die für  $\eta$  und  $\alpha$ . Die Funktionen besitzen also höchstens Unstetigkeiten erster Art. Weiter ist  $\alpha(t; x) < \pi$  für  $0 \leq t < T$ .

Sei  $T \in \mathbb{R}_e^+ \setminus \{0\}$  maximal gewählt. Ist  $T$  endlich, dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow T-} k_l(t; x) = k_l(T-; x), \quad \lim_{t \rightarrow T-} k_r(t; x) = k_r(T-; x)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow T-} \alpha(t; x) = \alpha(T-; x) \leq \pi.$$

Die Elemente  $k_l(T-; x)$  und  $k_r(T-; x)$  liegen in  $P_K(u(T; x))$  und sind verschieden. Somit ist  $u(T; x) \in \mathbf{N}_K$ . Aus der Maximalität von  $T$  folgt darüberhinaus  $u(T; x) \in \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$ , die Lösung des AWP's wird also für  $t \geq T$  stationär.

Aus den bisherigen Überlegungen erhalten wir

### 2.1. SATZ. $\mathbf{N}_K$ ist flußinvariant.

Das folgende Beispiel zeigt, daß eine Lösung des AWP's 1.7 mit AW  $x$  in  $\mathbf{N}_K \setminus \mathbf{F}_K$  in endlicher Zeit stationär werden kann, wobei  $\lim_{t \rightarrow T-} \alpha(t; x) = \pi$  gilt.

**2.2. BEISPIEL.** Sei  $K = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2: \xi_2^2 = \frac{1}{2} - |\xi_1|, |\xi_1| \leq \frac{1}{2}, \xi_2 \geq 0\}$ . Für den AW  $x = (0, \gamma)$ ,  $0 < \gamma < 1/\sqrt{2}$  berechnet man als Lösung  $u_1(t; x) = 0$  und  $u_2(t; x) = (1/\sqrt{2}) \{1 - (1 - \sqrt[3]{2\gamma^2}) e^{(2/3)t}\}^{3/2}$ ,  $0 \leq t < T$ , wobei  $T = \frac{3}{2} \log 1/(1 - \sqrt[3]{2\gamma^2})$  ist.

Sei  $x_0 \in \mathbf{N}_K$ . Ist  $P_K(x_0) = \partial b_K(x_0)$ , dann ist  $x_0$  ein isolierter Punkt in  $\mathbf{N}_K$ . Umgekehrt charakterisiert dies die isolierten Punkte, wie schon Th. Motzkin, loc. cit., bemerkt hat.

Im andern Fall ist das Komplement von  $P_K(x_0)$  auf  $\partial b_K(x_0)$  die Vereinigung von abzählbar vielen Bogenstücken. Wir betrachten ein solches Bogenstück mit den Endpunkten  $k_l^0$  und  $k_r^0$ ,  $\Delta_0$  ist das von  $k_l^0$ ,  $x_0$  und  $k_r^0$  gebildete offene Dreieck,  $C_0$  und  $\alpha_0$  der zugehörige Kegel bzw. Winkel im Punkte  $x_0$ .

Sei  $\alpha_0 < \pi$ . In  $\Delta_0$  existiert ein  $x \in \mathbf{N}_K \setminus \mathbf{F}_K$ , dessen Lösung  $u$  des AWP's in endlicher Zeit in den Punkt  $x_0$  hineinläuft. Denn ist  $\Delta_0 \subset \mathbf{E}_K$ , dann ist für jedes  $x \in \Delta_0$  die Lösung des AWP's eine Gerade, die durch den Punkt  $x_0$  verläuft. Folglich ist jeder Punkt des Bogenstückes zu  $P_K(x_0)$  gehörig, im Widerspruch zur Definition des Bogenstückes.

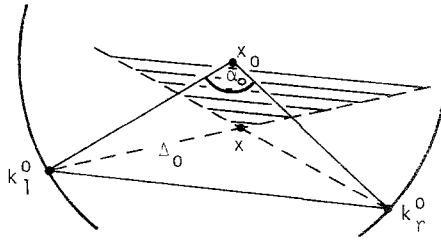


FIGURE 2

Sei  $x \in \Delta_0$  ein Punkt aus  $\mathbf{N}_K$ , dann ist

$$|(I - \Phi_K)^0(x)| =: |x - \eta| \geq |x - P_{[k_l^0, k_r^0]}(x)| =: \varepsilon > 0$$

und die Richtung von  $x - \eta$  weist in den an  $x$  gespiegelten Kegel, der von  $k_l^0$ ,  $x$  und  $k_r^0$  gebildet wird (Fig. 2). Solange sich die Lösung  $u$  in  $\Delta_0$  bewegt, gilt  $|(I - \Phi_K)^0(u(t; x))| \geq \varepsilon$ . Wir haben somit

$$\frac{d^2(u(t; x))}{2} - \frac{d^2(x)}{2} = \int_0^t |\dot{u}_+(\tau; x)|^2 d\tau \geq \varepsilon^2 \cdot t.$$

Es existiert folglich ein  $T > 0$ , so daß  $u(T; x) = x_0$  gilt. Weiter

$$\lim_{t \rightarrow T^-} k_{l,r}(t; x) = k_{l,r}.$$

Zusammenfassend erhalten wir

**2.3.** *Unter den oben gemachten Voraussetzungen ist  $\mathbf{N}_K \cap \Delta_0 \neq \emptyset$ . Ist  $x \in \mathbf{N}_K \cap \Delta_0$ , dann existiert ein  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , so daß  $u(t_0; x) = x_0$  gilt. Sind  $x, x' \in \mathbf{N}_K \cap \Delta_0$ , dann existieren  $t, t' \in \mathbb{R}^+$ , so daß  $u(t; x) = u(t'; x') \in \Delta_0$ .*

Ist  $\alpha_0 = \pi$ , dann sind, wie wir in den Abschnitten 4, 5 und 6 sehen werden, viele Möglichkeiten offen.

### 3

Sei  $x_0 \in \mathbf{N}_K$ . Wir definieren als maximale Lösung  $U_0$  des AWP's

$$\dot{u} \in (I - \Phi_K)(u), \quad u(0) = x_0$$

in  $\mathbf{N}_K$

$$\begin{aligned} U_0(t) &= u(t; x_0), & t \geq 0, \\ &= \{x \in \mathbf{N}_K : u(-t; x) = x_0\}, & t < 0. \end{aligned}$$

$U_0$  ist wegen der Halbgruppeneigenschaft der Lösungen der Differentialinklusioin wohl definiert. Weiter identifizieren wir  $U_0$  mit ihrem Bild im  $\mathbb{R}^2$ . Wir versehen  $U_0$  mit der rel. Topologie von  $\mathbb{R}^2$ .

Im folgenden stellen wir Eigenschaften von  $U_0$  zusammen. Als erstes

**3.1.**  $U_0$  ist kurvenzusammenhängend.

Es ist naheliegend, die folgende Teilordnung " $\leq$ " auf  $U_0$  einzuführen: Für  $x, x' \in U_0$  gilt  $x \leq x'$ , falls  $x' = u(t; x)$  für ein  $t \in \mathbb{R}^+$  gilt;  $x < x'$ , falls  $x \leq x'$  und  $x \neq x'$  gelten. Seien

$$M_0 = \{x \in U_0: x_0 \leq x\} \quad \text{und} \quad L_0 = \{x \in U_0: x \leq x_0\}.$$

**3.2.**  $M_0$  ist eine rel. zu  $U_0$  abgeschlossene, linear geordnete Teilmenge von  $U_0$ . Es existiert höchstens ein maximales Element in  $M_0$  bzw.  $U_0$ .

Der erste Teil ist klar wegen  $M_0 = \{x \in U_0: d_K(x_0) \leq d_K(x)\} = \{u(t; x_0): t \in \mathbb{R}^+\}$ . Wir haben genau dann ein maximales Element in  $M_0$  bzw.  $U_0$ , wenn die Lösung  $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto u(t; x_0)$  von einem  $T$  an,  $T \in \mathbb{R}^+$ , stationär wird. Ist  $x_0 \in \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$ , dann ist  $M_0 = \{x_0\}$ .

Über  $L_0$  lassen sich im allgemeinen inhaltsreichere Aussagen machen.

Sei  $L_0$  nicht trivial:  $L_0 \neq \{x_0\}$ . Dies ist beispielsweise in Beispiel 2.2 der Fall, obgleich  $x_0$  ein Fixpunkt ist. Betrachten wir ein Kurvenstück  $u(\tau)$ ,  $\alpha < \tau < \beta$ , in  $L_0$ , so folgt aus den Überlegungen in Abschnitt 2, daß sich  $L_0$  im Punkte  $t \in (\alpha, \beta)$  genau dann verzweigen kann, und zwar nach links bzw. nach rechts, wenn

$$\lim_{\tau \rightarrow t-} k_l(\tau) \neq k_l(t) = \lim_{\tau \rightarrow t+} k_l(\tau)$$

bzw.

$$\lim_{\tau \rightarrow t-} k_r(\tau) \neq k_r(t) = \lim_{\tau \rightarrow t+} k_r(\tau)$$

gilt. Weiter besitzt das Kurvenstück höchstens abzählbar viele Verzweigungspunkte. Ist  $x$  solch ein Punkt, dann ist die Kardinalität von  $P_K(x)$  größer oder gleich drei.

**3.3.**  $L_0$  ist eine rel. zu  $U_0$  abgeschlossene Teilmenge von  $U_0$  mit höchstens abzählbar vielen Verzweigungspunkten. Es existieren höchstens abzählbar viele minimale Punkte in  $L_0$  bzw.  $U_0$ . Das Element  $x$  ist ein minimaler Punkt, wenn  $P_K(x)$  gleich einem echten Bogenstück auf  $\partial b_K(x)$  mit Bogenlänge  $< d_K(x) \cdot \pi$  ist. (Es muß jedoch kein minimaler Punkt existieren.)

**3.4.**  $U_0$  ist ordnungsdicht, d.h.

$$\forall x', x'' \in U_0, x' < x'' \exists x \in U_0 \ni x' < x < x''.$$

Die Aussage ist evident.

**3.5.**  $U_0$  ist ein teilgeordneter, topologischer Raum.

**3.6.**  $U_0$  ist lokal zusammenhängend.

Es ist nicht schwer, die Stetigkeit der Teilordnung direkt nachzuweisen; sie läßt sich aber unmittelbar aus dem folgenden Hilfssatz schließen. Den Beweis von Aussage 3.6 führen wir anschließend.

Sei  $x \in L(x_0)$ ,  $\neq x_0$ . Wir bezeichnen mit  $t = t(x)$  den minimalen Wert  $t > 0$ , welcher  $u(t; x) = x_0$  erfüllt. Für  $x_0$  ist  $t(x_0) = 0$ .

**3.7. HILFSSATZ.** Seien  $x, x_1, x_2, \dots$  in  $L_0$  mit zugeordneten  $t, t_1, t_2, \dots$  in  $\mathbb{R}^+$ . Gilt  $\lim_n x_n = x$ , so gilt  $\lim_n t_n = t$ .

*Beweis.* Ist  $x_0 \in \mathbf{N}_K \setminus \mathbf{F}_K$ , also  $M_0$  nicht trivial, dann ist  $x_0 < u(t+1; x)$  und  $t_n \leq t+1$  für f.a.  $n$ , denn es gilt

$$\lim_n u(\tau, x_n) = u(\tau, x), \quad \text{gleichmäßig in } 0 \leq \tau \leq t+1$$

wegen

$$|u(\tau, x_n) - u(\tau, x)| \leq e^{\tau+1} |x_n - x|, \quad 0 \leq \tau \leq t+1.$$

Ist  $t'$  ein Häufungswert von  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ , so folgt  $t' = t$ , da  $x_0 = \lim_n u(t_n, x_n) = u(t', x)$ , also  $\lim_n t_n = t$ .

Sei  $x_0 \in \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$ , also  $M_0 = \{x_0\}$ , und sei  $x < x_0$ . Wir setzen  $k_{l,r}^0 = \lim_{\tau \rightarrow t-} k_{l,r}(\tau, x)$ .

Seien  $\varepsilon, \delta > 0$  genügend klein gewählt, dann existiert ein  $x' = u(t'; x)$ ,  $0 < t' < t$ , so daß der  $\delta$ -Schlauch um  $u(\cdot; x)$  innerhalb des Kreisringes  $\{y \in \mathbb{R}^2: \varepsilon < |y - x_0| < d_K(x_0)\}$  in dem von  $k'_l, x'$  und  $k'_r$  aufgespannten Kegel liegt (Fig. 3). Wegen

$$\lim_n u(\tau, x_n) = u(\tau, x), \quad \text{gleichmäßig in } 0 \leq \tau \leq t,$$

folgt  $x_n \ll x'$  für f.a.  $n$ . Aus den schon oben durchgeführten Überlegungen folgt somit auch in diesem Falle  $\lim_n t_n = t$ .

Sei  $x_0 \in \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$ , also  $M_0 = \{x_0\}$ , und sei  $x = x_0$ , also  $\lim_n x_n = x_0$ . Es existiere ein  $\tilde{x} \in L_0$ , so daß für unendlich viele  $n$ , o.g.B.d.A. für alle  $n$ , gilt:  $x_n = u(\tilde{t}_n; \tilde{x})$  und  $x_0 = u(\tilde{t}; \tilde{x})$ ,  $0 \leq \tilde{t}_n \leq \tilde{t}$ . Aus  $\lim_n \tilde{t}_n = \tilde{t}$ ,  $x = u(\tilde{t}_n + t_n; \tilde{x})$  und  $\tilde{t} = \tilde{t}_n + t_n$  folgt dann  $\lim_n t_n = 0 = t$ .

Ist obige Annahme nicht gegeben, so liegen unendlich viele, o.B.d.A. alle Elemente der Folge  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , auf paarweise verschiedenen Zweigen  $\{u(\tau; x_n): 0 \leq \tau \leq t_n\}_{n=1}^\infty$  von  $L_0$ , die in  $x_0$  münden, siehe Aussage 2.3 als auch Aussage 5.2. Sei  $\alpha_n$  der Winkel des von  $k_l^{(n)}, x$  und  $k_r^{(n)}$  gebildeten



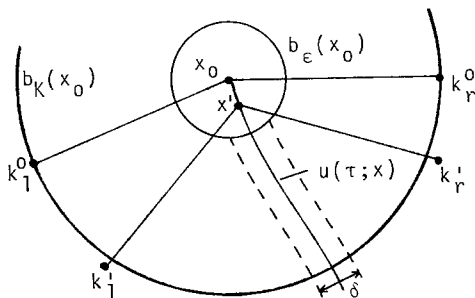


FIGURE 3

Kegels  $(k_{l,r}^{(n)} = \lim_{\tau \rightarrow t_n^-} k_{l,r}(\tau; x_n))$ . Es gilt  $\lim_n \alpha_n = 0$  und folglich  $|\dot{u}_+(\tau; x_n)| \geq d_K(x_0)/2$  für f.a.  $n$ . Aus

$$\frac{d_K^2(x_0)}{2} - \frac{d_K^2(x_n)}{2} = \int_0^{t_n} |\dot{u}_+(\tau; x_n)|^2 dt \geq \frac{d_K^2(x_0)}{4} \cdot t_n$$

folgt schließlich auch in diesem Falle  $\lim_n t_n = t = 0$ . ■

### 3.8. $U_0$ ist in sich kontrahierbar.

Offenkundig ist  $M_0$  auf  $x_0$  kontrahierbar. Sei  $x \in L_0$  und sei  $t \geq 0$  durch  $u(t; x) = x_0$ , wie oben beschrieben, definiert. Aus dem Hilfssatz folgt, daß

$$[0, 1] \times L_0 \ni (\tau, x) \mapsto F(\tau, x) = u((1 - \tau)t; x)$$

eine stetige Deformation von  $L_0$  in sich auf  $x_0$  definiert.

*Beweis* von 3.6. Für  $x \in M_0 \setminus \{x_0\}$  ist nichts zu zeigen. Ist  $x = x_0$  und  $V$  eine Umgebung von  $x_0$ , dann definiert  $\{y \in U_0: d_K(x_0) - \delta < d_K(y) < d_K(x_0) + \delta\}$  für  $\delta > 0$ , genügend klein, eine zusammenhängende Umgebung von  $x_0$ , die in  $V$  enthalten ist.

Sei  $x \in L_0 \setminus \{x_0\}$  und  $V$  eine Umgebung von  $x$ . O.B.d.A. sei  $V = b_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen ein  $t > 0$ , so daß  $u(t; x) < x_0$  kein Verzweigungspunkt in  $L_0$  ist. Weiter wählen wir  $\delta > 0$ . Für  $t$  und  $\delta$  genügend klein liegt die Menge  $\{y \in L_0: d_K(x) - \delta < d_K(y)\}$  geschnitten mit  $C(t; x)$  in  $b_\varepsilon(x)$ . Diese Menge enthält offenkundig  $x$  und ist kurvenzusammenhängend. ■

Ein Baum ist ein Kontinuum, in welchem je zwei Punkte durch einen dritten getrennt werden können. In [14] bewies L. E. Ward, Jr.: Sei  $X$  ein kompakter Hausdorffraum.  $X$  ist genau dann ein Baum, wenn auf  $X$  eine Teilordnung  $\leq$  definiert werden kann mit den folgenden Eigenschaften:

(i)  $\leq$  ist halbstetig, d.h.,  $\forall x \in X$  sind  $L(x)$  und  $M(x)$  abgeschlossene Mengen in  $X$ .

- (ii)  $\leq$  ist ordnungsdicht.
- (iii)  $\forall x, y \in X$  ist  $L(x) \cap L(y)$  eine nicht leere Kette.
- (iv)  $\forall x \in X$  ist  $M(x) \setminus \{x\}$  offen.

Für ein  $x \in X$  sind  $L(x) = \{y \in X: y \leq x\}$  und  $M(x) = \{y \in X: x \leq y\}$ .

$U_0$  ist im allgemeinen nur  $\sigma$ -kompakt, jedoch lassen sich, wie man leicht sieht, je zwei Punkte in  $U_0$  durch einen dritten trennen. Wenn wir die oben definierte Teilordnung umdrehen, d.h., für  $x, x' \in U_0$  gilt  $x \leq x'$ , falls  $x' \leq x$  gilt, dann haben wir zudem auf  $U_0$  eine Teilordnung, die den Eigenschaften (i) bis (iv) genügt.

Ohne eine formelle Definition geben zu wollen, können wir sagen:

**3.9.**  $U_0$  hat Baumstruktur.

Bäume sind lokal zusammenhängend; dies gilt auch für  $U_0$ , Aussage 3.6. Weiter sind Bäume in sich kontrahierbar, wie erst 1982 D. G. Paulovich [13] bewiesen hat. In unserem Falle ließ sich die Kontrahierbarkeit von  $U_0$ , Aussage 3.8, unschwer aus der Parameterdarstellung von  $U_0$  folgern.

**4**

Sei  $x_0 \in \mathbf{N}_K$  und sei  $U_0$  die maximale Lösung des zugehörigen AWP.  $L_0$  sei nicht trivial.

In Aussage 3.3 haben wir u.a. die minimalen Punkte von  $L_0$  bzw.  $U_0$  beschrieben. Sei nun  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  eine strikt fallende Kette in  $L_0$ , die keine untere Schranke in  $L_0$  besitzt und sei  $\lim_n d_K(x_n) = r > 0$ . Wegen der Kompaktheit von  $K$  besitzt die Folge  $\{x_n\}$  einen Häufungspunkt, o.B.d.A. gelte  $\lim_n x_n = x$ . Für  $-t_n \leq t \leq 0$  setzen wir

$$\varphi(t) = u(t_n + t; x_n),$$

wobei  $u(t_n; x_n) = x_0$  gilt,  $t_n \in \mathbb{R}^+$  ist wie im voranstehenden Abschnitt minimal gewählt. Die Folge  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  ist strikt monoton wachsend in  $\mathbb{R}^+$ . Sei  $T = \lim_n t_n \in \mathbb{R}_e^+$ .

Sei  $T$  endlich. In diesem Falle gilt

$$\varphi(t) = u(T + t; x), \quad -T < t \leq 0,$$

wobei  $x$  ein Punkt in  $\mathbf{S}_K \cap \mathbf{E}_K$  ist. Folglich haben wir neben Satz 2.1

**4.1. SATZ.**  $\mathbf{S}_K$  ist flußinvariant.

Und weiter

**4.2.** Sei  $x_0 \in \mathbf{S}_K$ . Ist  $x_0 \in \mathbf{S}_K \setminus \mathbf{N}_K$ , dann bestimmt  $U_0 = \{u(t; x_0): t \in \mathbb{R}^+\}$  die maximale Lösung des zugehörigen AWP in  $\mathbf{S}_K$ . Ist  $x_0 \in \mathbf{N}_K$ ,

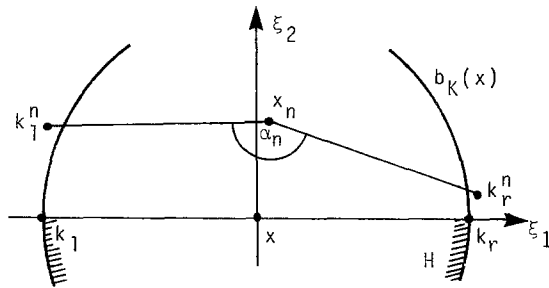


FIGURE 4

dann unterscheidet sich die maximale Lösung des zugehörigen AWP's in  $S_K$  von der in  $N_K$  durch die Hinzunahme von abzählbar vielen minimalen Punkten in  $S_K \cap E_K$ .

Sei  $T$  unendlich. Wir bezeichnen mit  $C_n$  den von  $k_l^n$ ,  $x_n$  und  $k_r^n$  gebildeten offenen Kegel. Die Folge der Schnitte von  $C_n$  mit  $b_K(x)$  bilden eine absteigende Folge von Sektoren in  $b_K(x)$ , die für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Halbkreisscheibe, nennen wir sie  $H$ , konvergiert (Fig. 4). Die Annahme, daß die Folge der Schnitte gegen einen echten Sektor in  $b_K(x)$  konvergiert, widerspricht der Voraussetzung, daß  $T$  unendlich ist. Da  $\mathbb{R}^- \ni t \mapsto d_K(\varphi(t))$  strikt monoton fallend für  $t \rightarrow -\infty$  gegen  $d_K(x) = d$  konvergiert und da  $\varphi(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^-$  im Komplement von  $\bar{b}_d(k_l)$  und  $\bar{b}_d(k_r)$  liegt, folgt

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = x \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} k_{l,r}(t) = k_{l,r} \quad \text{in } P_K(x), \quad x = (k_l + k_r)/2$$

und  $P_K(x) \subset \bar{H} \cap \partial b_K(x)$ .

Wir wollen noch zeigen, daß die Kurve  $\varphi$  rektifizierbar ist. O.B.d.A. sei  $K$  so, daß  $x$  im Ursprung liegt und daß  $k_l$  und  $k_r$  durch  $(-1, 0)$  bzw.  $(1, 0)$  gegeben sind. Da, wie schon oben bemerkt,  $\varphi(t) \in \mathcal{C}\{\bar{b}_1(k_l) \cup \bar{b}_1(k_r)\}$  für alle  $t \in \mathbb{R}^-$ , ist  $\dot{\varphi}_2(t) > 0$  für fast alle  $t$ -Werte genügend nahe bei  $-\infty$  (es genügt,  $\varphi(t) \in b_K(x)$  anzunehmen);  $\varphi_2(t)$  konvergiert also strikt monoton fallend gegen Null. Weiter gilt für  $t$  genügend nahe bei  $-\infty$

$$\left| \frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\dot{\varphi}_2(t)} \right| \leq \frac{|\varphi_2(t)|}{\sqrt{1 - \varphi_2^2(t)}} \quad \text{f.ü.}$$

$\varphi$  läßt sich folglich in einer Umgebung des Ursprungs als Funktion von  $\xi_2$  darstellen:  $[0, \varepsilon] \ni \xi_2 \rightarrow \Psi(\xi_2) = (\Psi_1(\xi_2), \xi_2)$ ,  $\Psi_1$  ist lipschitzstetig.

Zusammenfassend haben wir

**4.3.** Sei  $\varphi: \mathbb{R}^- \rightarrow L_0$  eine Lösung des AWP's mit  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d_K(\varphi(t)) = r > 0$ , dann strebt  $\varphi(t)$  für  $t \rightarrow -\infty$  gegen ein  $x \in N_K \cap F_K$  und  $\varphi$  ist rektifizierbar.

Sei nun  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  eine strikt monoton fallende Kette in  $L_0$ , die keine untere Schranke in  $L_0$  besitzt und für die  $\lim_n d_K(x_n) = 0$  gilt.

Definieren wir wie oben die Funktion  $\varphi$ , dann ist  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}^-$  definiert, da die Folge  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  gegen  $\infty$  divergiert. Das folgende Beispiel zeigt, daß in diesem Falle der Limes von  $\varphi(t)$  für  $t \rightarrow -\infty$  nicht zu existieren braucht.

**4.4. BEISPIEL.** Sei  $\kappa: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch  $\kappa_1(t) = r(t) \cos t$  und  $\kappa_2(t) = r(t) \sin t$ , wobei  $r(t) = 1 + e^{-t}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  ist. Sei  $K = \bar{b}_1(0) \cup \kappa(\mathbb{R}^+)$ . Der Cosinus des Winkels zwischen  $\kappa(t)$  und  $\dot{\kappa}(t)$  berechnet sich für ein  $t \in \mathbb{R}^+$  zu

$$\frac{\langle \kappa(t), \dot{\kappa}(t) \rangle}{|\kappa(t)| |\dot{\kappa}(t)|} = -\frac{1}{\{e^{2t} + 2e^t + 2\}^{1/2}},$$

er ist strikt negativ und strebt strikt monoton wachsend gegen Null für  $t \rightarrow \infty$ . Hieraus und aus der Tatsache, daß die metrische Projektion für jeden Punkt der Ebene höchstens zwei Elemente enthält, folgt elementargeometrisch, daß  $\mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K = \emptyset$  ist. Sei  $x_0$  ein Punkt in  $\mathbf{N}_K$ , dann beschreibt  $L_0$  eine Spirale, deren Abschluß die Einheitskugel enthält.

## 5

Eine *Brücke* von  $K$  ist ein Geradenstück, für welches nur die Endpunkte Elemente von  $K$  sind, und zwar so, daß die durch sie gebildete Gerade eine Stützgerade an  $K$  ist. Der Begriff findet sich schon bei Th. Motzkin [10], wo gezeigt wird: Der äußere Rand von  $K$  (kompakt) ist entweder ein Oval oder er besitzt wenigstens eine Brücke.

Ist  $K$  nicht konvex, dann hat  $K$  abzählbar viele Brücken—hier kommt wiederum die Kompaktheit von  $K$  zum Tragen. Wir setzen weiter voraus, daß das Innere von  $\text{co } K$  nicht leer ist.

Sei  $[k_l^0, k_r^0]$  eine Brücke von  $K$ . Die Endpunkte sind Lichtpunkte von  $K$ , d.h., ist  $e$  der Einheitsvektor, der auf der Brücke senkrecht steht und ins Äußere von  $\text{co } K$  weist, dann gehören die Halbstrahlen  $k_l^0 + \mathbb{R}^+ e$  und  $k_r^0 + \mathbb{R}^+ e$  zu  $P_K^{-1}(k_l^0)$  bzw.  $P_K^{-1}(k_r^0)$ . —Durch die Forderung, daß  $(k_r^0 - k_l^0, e)$  ein Rechtssystem in  $\mathbb{R}^2$  bildet, sind auch die beiden Endpunkte eindeutig gekennzeichnet. —Wir bezeichnen das Innere des von den beiden Halbstrahlen und der Brücke gebildeten Halbstreifens mit  $H_0$ .  $H_0$  ist nicht frei von Punkten aus  $\mathbf{N}_K$ . Es existiert, wie bereits Motzkin gezeigt hat, ein  $r_0 > 0$ , so daß für jedes  $r > r_0$  ein  $x_r$  aus  $\mathbf{N}_K$  in  $H_0$  liegt mit  $\text{Norm } |x_r| = r$ . Darüberhinaus konnte L. Calabi in einem Techn. Bericht [5] von 1965 nachweisen, daß diese Punkte in  $\mathbf{N}_K \cap H_0$  für  $r \rightarrow \infty$  asymptotisch gegen die Mittelsenkrechte des Halbstreifens streben (Fig. 5).

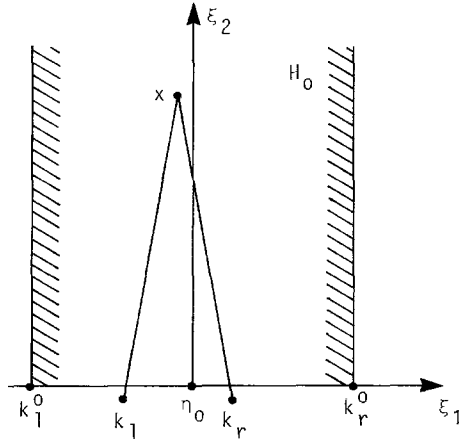


FIGURE 5

Daß  $N_K \cap H_0$  nicht leer ist, läßt sich wie in Aussage 2.3 nachweisen. Wir werden hier das Ergebnis von Calabi in der folgenden Form verifizieren.

**5.1.** Sei  $x \in N_K \cap H_0$ . Es gelten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t; x)| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} k_{l,r}(t; x) = k_{l,r}^0.$$

Weiter konvergiert  $u$  für  $t \rightarrow \infty$  asymptotisch gegen  $\eta_0 + \mathbb{R}^+ \cdot e$ ,  $\eta_0 = (k_l^0 + k_r^0)/2$ . Ist  $x'$  ein weiterer Punkt in  $N_K \cap H_0$ , dann existieren  $t, t' \in \mathbb{R}^+$ , so daß  $u(t; x) = u(t'; x')$  gilt.

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $K \subset \mathbb{R}^2$  so gelegen, daß  $k_l^0 = (-1, 0)$  und  $k_r^0 = (1, 0)$  gelten.  $H_0$  ist damit der offene Halbstreifen  $\{\xi \in \mathbb{R}^2: -1 < \xi_1 < 1 \text{ und } \xi_2 > 0\}$ . Für ein  $x \in N_K \cap H_0$  ist die Lösung des AWP's gegeben durch  $u(t; x) = e^t \{x - \int_0^t \eta(\tau; x) e^{-\tau} d\tau\}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , wobei  $\eta(t; x) = (k_l(t; x) + k_r(t; x))/2$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , rechtsseitig stetig ist und  $-1 \leq \eta_1(t; x) \leq 1$  und  $\eta_2(t; x) \leq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , erfüllt. In der Tat gelten für  $k_l(\cdot; x)$  und  $k_r(\cdot; x)$  die Abschätzungen  $-1 \leq k_{l,1}(t; x) < k_{r,1}(t; x) \leq 1$  und

$$-\frac{1}{2u_2(t; x)} \leq k_{l,2}(t; x), k_{r,2}(t; x) \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Aus  $|u_1(t; x)| = e^t |x_1 - \int_0^t \eta_1(\tau; x) e^{-\tau} d\tau| \leq 1$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , folgt  $x_1 = \int_0^\infty \eta_1(\tau; x) e^{-\tau} d\tau$  und

$$u_1(t; x) = \int_t^\infty \eta_1(\tau; x) e^{-(\tau-t)} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Weiter ist wegen  $\eta_2(t; x) \leq 0, t \in \mathbb{R}^+,$

$$u_2(t; x) = e^t \left\{ x_2 - \int_0^t \eta_2(\tau; x) d\tau \right\}$$

strikt monoton wachsend gegen  $+\infty$  für  $t \rightarrow \infty,$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_{l,2}(t; x) = \lim_{t \rightarrow \infty} k_{r,2}(t; x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_2(t; x) = 0.$$

Bezeichnen wir mit  $\tilde{k}_l(t; x)$  und  $\tilde{k}_r(t; x)$  den Schnitt der Strecke  $[k_l(t; x), u(t; x)]$  bzw. der Strecke  $[k_r(t; x), u(t; x)]$  mit der  $\xi_1$ -Achse, dann sind  $\tilde{k}_{l,1}(t; x)$  und  $\tilde{k}_{r,1}(t; x)$  monoton fallend bzw. wachsend und durch  $-1$  nach unten bzw.  $1$  nach oben beschränkt. Die Grenzwerte von  $\tilde{k}_l(t; x)$  und  $\tilde{k}_r(t; x)$  für  $t \rightarrow \infty$  existieren somit, und es gilt, zusammen mit den zuvor angestellten Überlegungen,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_{l,r}(t; x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{k}_{l,r}(t; x) = \tilde{k}_{l,r}.$$

Die Punkte  $\tilde{k}_l$  und  $\tilde{k}_r$  gehören zu  $K$  und liegen auf  $[k_l^0, k_r^0]$ . Dann muß aber  $\tilde{k}_l = k_l^0$  und  $\tilde{k}_r = k_r^0$  gelten und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t; x) = 0$ . Hieraus folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t; x) = 0$ . Die Lösung strebt somit asymptotisch gegen die  $\xi_2$ -Achse für  $t \rightarrow \infty$ .

Die letzte Aussage von 4.1 folgt aus der Tatsache, daß der Schnitt des von  $k_l(t; x), u(t; x)$  und  $k_r(t; x)$  gebildeten Kegels mit  $H_0$  für  $t \rightarrow \infty$  ganz  $H_0$  ausschöpft. ■

Wir bezeichnen mit  $Z_0$  die Vereinigung aller maximalen Lösungen mit AW in  $\mathbf{N}_K \cap H_0$  und nennen die Vereinigungsmenge einen *Zweig* von  $\infty$ . Es gilt

**5.2. SATZ.** *Der unendlich ferne Punkt hat abzählbar viele Zweige, jeder Zweig hat Baumstruktur (im Sinne von Aussage 3.9) und läßt sich in sich auf den unendlich fernen Punkt zusammenziehen.*

## 6

Wie am unendlich fernen Punkt verhält sich die Nichteindeutigkeitsmenge an einem Punkt  $x_0$ , für den  $x_0$  im Innern von  $\Phi_K(x_0)$  liegt.

**6.1. SATZ.** *Die Punktmenge  $\{x \in \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K : x \in \text{int}(\Phi_K(x))\}$  ist abzählbar. Ist  $x_0$  ein Punkt dieser Menge, dann hat  $d_K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  ein striktes*

relatives Maximum in  $x_0$  und seine maximale Lösung  $U_0$  hat abzählbar viele Zweige, die in sich auf  $x_0$  zusammenziehbar sind.

Die Abzählbarkeit der Menge ist offenkundig. Weiter gilt  $U_0 = L_0$ , woraus nach Abschnitt 3 die weiteren Aussagen folgen.

Sei  $x_0 \in \mathbb{N}_K \setminus \mathbb{F}_K$  und sei  $U_0$  seine maximale Lösung des zugehörigen AWP. Sei  $M_0$  beschränkt.

Hat  $M_0$  ein maximales Element, sagen wir  $x_T = u(T; x_0)$ ,  $T \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  minimal gewählt, dann bildet die Vereinigung aller maximalen Lösungen  $U_t$  von  $u(t; x_0)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , einen Zweig  $Z_T = \bigcup_{0 \leq t < T} U_t$  von  $x_T$ , der in dem Segment  $C(T-; x_T) \cap b_K(x_T)$  lebt, d.h. der Schnitt von  $Z_T$  mit  $b_K(x_T)$  liegt im Kegel  $C(T-; x_T)$ .

Wie das Beispiel 2.2 zeigt, kann auch in diesem Fall das Segment eine Halbkreisscheibe sein.

Hat  $M_0$  kein maximales Element, dann existiert der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t; x_0) = x_\infty$  und die Vereinigung aller maximalen Lösungen  $U_t$  von  $u(t; x_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , bildet auch hier einen Zweig  $Z_\infty = \bigcup_{0 \leq t < \infty} U_t$  von  $x_\infty$ , der in einer Halbkreisscheibe lebt (Fig. 6).

Um dies einzusehen, sei  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  eine monoton gegen  $\infty$  divergierende Folge in  $\mathbb{R}^+$ , für die die Folge  $\{x_n = u(t_n; x_0)\}$  gegen  $x_\infty$  konvergiert. Sei  $\{C_n = C(t_n; x_0)\}$  die zugehörige Folge von Kegeln. Ihre Schnitte mit  $b_K(x_\infty)$  bilden eine aufsteigende Folge von Sektoren in  $b_K(x_0)$ , die, wie aus den Überlegungen in der zweiten Hälfte von Abschnitt 2 folgt, gegen eine Halbkreisscheibe, nennen wir sie  $H_\infty$ , konvergiert. Offenkundig gilt  $\lim_n k_{l,r}^n = k_{l,r}^\infty$  in  $P_K(x_\infty)$  und  $x_\infty = (k_l^\infty + k_r^\infty)/2$ . Und weiter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t; x_0) = x_\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} k_{l,r}(t; x_0) = k_{l,r}^\infty.$$

Ist die Kardinalität von  $P_K(x_\infty)$  größer als zwei, dann besitzt die Distanzfunktion in  $x_\infty$  ein striktes relatives Maximum. Es lassen sich aber leicht Beispiele konstruieren, in denen letzteres gültig ist, obgleich die Kardinalität von  $P_K(x_\infty)$  gleich zwei ist.

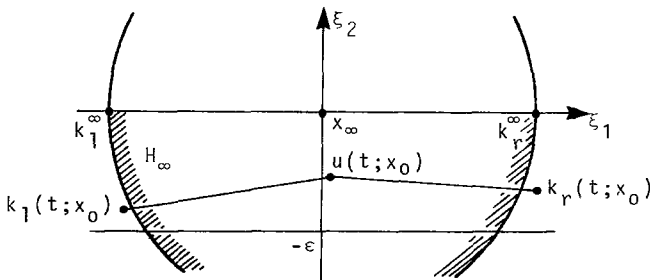


FIGURE 6

Wir zeigen noch, daß  $M_0$  rektifizierbar ist.

O.B.d.A. sei  $K$  so gelegen, daß  $x_\infty$  im Ursprung liegt und  $k_l^\infty$  und  $k_r^\infty$  in  $(-1, 0)$  bzw.  $(1, 0)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $t$  genügend groß, sind die  $\xi_2$ -Koordinaten von  $k_l(t; x_0)$  und  $k_r(t; x_0)$  größer als  $-\varepsilon$ . Es folgt, daß  $u_2(t; x_0)$  strikt monoton wachsend gegen Null konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ . Weiter ist für  $t$  genügend groß

$$\left| \frac{\dot{u}_1(t; x_0)}{\dot{u}_2(t; x_0)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{f.ü.}$$

In der Umgebung von Null läßt sich  $u$  als Funktion von  $\xi_2$  darstellen:  $[-\varepsilon, 0] \ni \xi_2 \mapsto \Psi(\xi_2) = (\Psi_1(\xi_2); \xi_2)$ , und  $\Psi_1$  ist lipschitzstetig,  $\varepsilon > 0$ .

Aus diesen Überlegungen und denen des voranstehenden Abschnittes folgern wir schließlich

**6.2. SATZ.** *Es existieren abzählbar viele Punkte in  $\mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$ , so daß  $\mathbf{N}_K \setminus \mathbf{F}_K$  sich als Vereinigung der Zweige dieser Punkte und des unendlich fernen Punktes schreiben läßt.  $\mathbf{N}_K \setminus \mathbf{F}_K$  ist folglich als Vereinigung von abzählbar vielen lipschitzstetigen Kurvenstücken darstellbar.*

7

Bei der nun folgenden Beschreibung der Fixpunktmenge  $\mathbf{F}_K = \{x \in \mathbb{R}^2; x \in \Phi_K(x)\}$  können wir nicht auf das AWP 1.7 als ein technisches Mittel zurückgreifen, wie schon in der Einleitung bemerkt.

Als eine erste elementare Überlegung stellen wir fest

**7.1.** *Sei  $(x, k) \in P_K$ ,  $x \neq k$ . Dann gilt*

$$\mathbf{F}_K \cap b_K\left(\frac{x+k}{2}\right) = \emptyset.$$

Man schließt dies leicht aus der Tatsache, daß  $b_K(x)$  aus  $b_K((x+k)/2)$  durch zentrische Streckung von  $k$  aus mit Streckungsfaktor 2 hervorgeht (für alle  $y \in b_K((x+k)/2)$  ist  $P_K(y) \subset \bar{b}_{|y-k|}(y) \setminus b_K(x)$ ) (Fig. 7).

Hieraus erhalten wir

**7.2.** *Ist  $x \in \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{F}_K$ , dann ist  $x \in \partial\Phi_K(x)$ , es existieren somit  $k$  und  $k'$  in  $P_K(x)$  mit  $x = (k+k')/2$ .*

Wäre die Behauptung falsch, würden paarweise verschiedene Punkte  $k, k'$  und  $k''$  in  $P_K(x)$  existieren, so daß  $x$  eine echte konvexe Kombination dieser drei Punkte wäre. Nach Aussage 7.1 angewandt auf  $(x, k)$ ,  $(x, k')$  und  $(x, k'')$  müßte  $x$  dann ein isolierter Punkt in  $\mathbf{F}_K$  sein, siehe auch Satz 6.1.



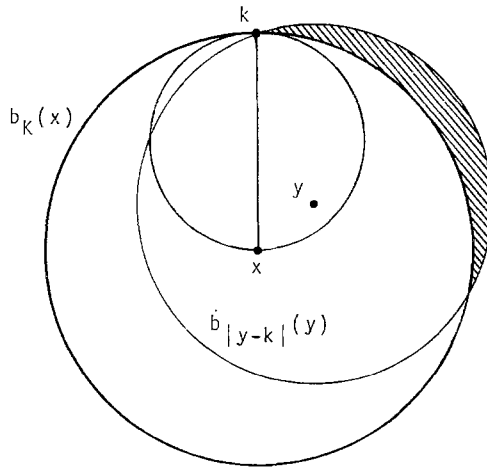


FIGURE 7

Daß die Punktmenge  $\mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$  im allgemeinen von komplizierter Struktur ist, zeigt das folgende

**7.3. BEISPIEL.** Sei  $C$  das Cantorsche Diskontinuum im Intervall  $[0, 1]$  von  $\mathbb{R}$  und sei  $K \subset \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$K := \{(c, \pm 1) \in \mathbb{R}^2 : c \in C\}.$$

Mit der Darstellung  $[0, 1] \setminus C = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ , wobei  $I_j$  die bei der Konstruktion der Cantormenge verwendeten Intervalle sind, und mit

$$M := \{m_j : m_j \text{ ist der Mittelpunkt von } I_j, j \in \mathbb{N}\},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K = & \{(m, i) \in \mathbb{R}^2 : m \in M \text{ und } i = 0, \pm 1\} \\ & \cup \{(c, 0) \in \mathbb{R}^2 : c \in C\}. \end{aligned}$$

Die erste Menge ist die abzählbare Vereinigung der isolierten Punkte in  $\mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$ , für  $i = 0$  sind die Punkte strikte lokale Maxima von  $d_K$  und für  $i = \pm 1$  Sattelpunkte. Die zweite Menge ist als Cantormenge perfekt und total unzusammenhängend.

Als eine zweite elementare Überlegung bemerken wir

**7.4.** Sei  $x \in \mathbf{F}_K$ . Für jedes  $x' \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$d_K^2(x') \leq d_K^2(x) + |x' - x|^2.$$

Insbesondere ist  $F_K \ni x \mapsto d_K^2(x)/2$  auf  $F_K$  differenzierbar mit verschwindender Ableitung.

Ist  $x \in K$ , ist nichts zu beweisen. Sei also  $x \in N_K \cap F_K$ . Da  $x \in \Phi_K(x)$ , existiert ein  $k \in P_K(x)$ , so daß  $\langle x' - x, k - x \rangle \geq 0$ . Aus

$$d_K^2(x') \leq |x' - k|^2 = |x' - x|^2 + |k - x|^2 - \langle x' - x, k - x \rangle$$

folgt die Behauptung.

Aus den Aussagen 7.1 und 7.2 folgt, daß jede nicht triviale Zusammenhangskomponente von  $N_K \cap F_K$  in jedem Punkt eine Tangente besitzt. Mit Hilfe eines Ergebnisses von Chr. Pauc [11] folgt die differenzierbare Parametrisierbarkeit der Komponente. Wir erhalten auf anderem Wege die stärkere Aussage

**7.5.** *Jede nicht triviale Zusammenhangskomponente von  $N_K \cap F_K$  läßt sich als stetig differenzierbares Kurvenstück parametrisieren. Weiter ist auf ihr die Distanzfunktion konstant.*

*Beweis.* Sei  $C$  eine solche Komponente. O.B.d.A. sei  $x_0 = (0, 0) \in C$ .  $k_0 = (0, 1)$  und  $k'_0 = (0, -1)$  seien in  $P_K(x_0)$ , und der Schnitt der offenen rechten Halbebene mit  $P_K(x_0)$  sei leer, nicht dagegen der mit  $C$  in  $b_K(x_0)$ .

Wegen der n.o. Halbsteitigkeit von  $P_K$  und wegen Aussage 7.1 existiert ein nicht triviales Intervall  $[0, T]$ , so daß für jedes  $t \in [0, T]$  in  $b_K(x_0)$  genau ein  $x(t) = (t, \xi_2(t))$  in  $C$  existiert. Das Kurvenstück, wir nennen es  $S$ ,

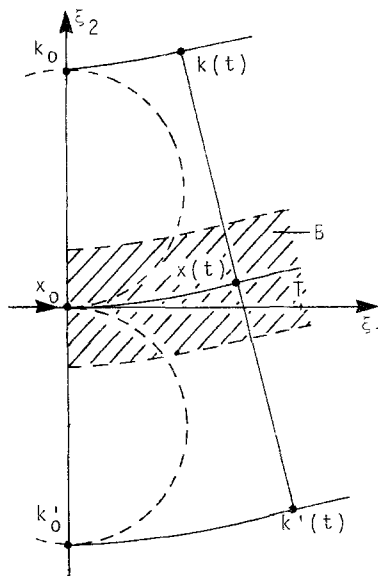


FIGURE 8

ist stetig, so auch die Kurvenstücke  $[0, 1] \ni t \mapsto k(t)$  und  $k'(t)$  in  $K$  mit  $x(t) = \{k(t) + k'(t)\}/2$ ,  $k(t), k'(t) \in P_K(x(t))$ . Weiter gilt  $P_K(x(t)) = \{k(t), k'(t)\}$  für  $0 < t < T$  (Fig. 8).

Sei  $B := \{y(t; s) := x(t) + s\{k(t) - k'(t)\} : 0 \leq t \leq T \text{ und } |s| \leq 1/4\}$  und sei  $D: B \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\begin{aligned} D(y(t; s)) &= d_C(y(t; s)), & s \geq 0, \\ &= -d_C(y(t; s)), & s \leq 0. \end{aligned}$$

Nach Definition ist  $S = C \cap B = \{y \in B : D(y) = 0\}$ . Da  $B \subset E_C$ , ist  $D$  stetig differenzierbar auf  $B$  mit  $\text{grad } D(y(t; s)) = \{k(t) - k'(t)\}/|k(t) - k'(t)| \neq 0$  für alle  $y(t, s) \in B$ . Aus dem Satz für implizite Funktionen folgt dann die stetige Differenzierbarkeit von  $S$ . — Die Randpunkte bereiten bei den Überlegungen keine Schwierigkeiten. In der Tat können wir  $S$  in die linke Halbebene entlang der reellen Achse forsetzen und für  $t < 0$  und  $|s| \leq \frac{1}{4}$  die Funktion  $y(t, s)$  mittels  $k_0 - k'_0$  und  $D$  wie oben definieren; entsprechend können wir für  $t > T$  verfahren.

Zum Beweis des zweiten Teils der Aussage genügt die Feststellung, daß mit 7.4 die Funktion  $[0, T] \ni t \mapsto d_K(x(t)) \in \mathbb{R}$  stetig differenzierbar ist mit Ableitung ist mit Ableitung gleich Null.

Wegen der Kompaktheit von  $K$  erhalten wir, daß  $C$  selbst ein glattes Kurvenstück ist mit  $d_K|_C$  konstant. ■

Zum Schluß wollen wir noch bemerken, daß  $C$  durchaus ein einfach geschlossenes Kurvenstück sein kann, wie man am Beispiel

$$K := \{0\} \cup \partial b_1(0)$$

sofort sieht.

## 8

Sei  $x_0 \in \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{F}_K$ . Wegen 7.2 existieren  $k_0$  und  $k'_0$  in  $P_K(x_0)$  mit  $x_0 = (k_0 + k'_0)/2$ . O.B.d.A. nehmen wir wieder an, daß  $x_0$  im Ursprung liegt,  $k_0$  in  $(0, 1)$  und  $k'_0$  in  $(0, -1)$ , daß der Schnitt von  $P_K(x_0)$  mit der offenen rechten Halbebene  $H_+$  leer ist und daß  $x_0$  Häufungspunkt von Elementen in  $\mathbf{F}_K \cap H_+$  ist.

Sei  $\varepsilon > 0$ , klein gegen  $1 = d_K(x_0)$ . Wegen der Oberhalbstetigkeit von  $P_K$  existiert ein  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , so daß  $P_K(x)$  für alle  $x \in b_\delta(x_0) \cap H_+$  in  $b_\varepsilon(k_0) \cup b_\varepsilon(k'_0)$  liegt. Wir setzen noch  $K_\varepsilon = K \cap b_\varepsilon(x_0)$  und  $K'_\varepsilon = K \cap b_\varepsilon(k'_0)$ .

Sei  $x_T$  ein Element in  $\mathbf{F}_K \cap b_\delta(x_0) \cap H_+$  mit  $\xi_1$ -Koordinate gleich  $T \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Wegen 7.1 liegt auf der Geraden durch  $x_T$ , die parallel zur  $\xi_2$ -Achse verläuft, kein weiterer Punkt aus  $\mathbf{F}_K \cap b_\delta(x_0)$ . Sei nun  $0 < t < T$ . Aus

demselben Grunde existiert auf der Parallelen durch  $(t, 0)$  höchstens ein Element  $x_t \in \mathbf{F}_K \cap b_\delta(x_0)$ . Unsere Überlegungen verlaufen soweit parallel zu denen im Beweis von Aussage 7.4. Allgemeiner als dort gilt jedoch hier: Für jedes  $0 < t < T$  existiert genau ein  $x(t) = (t, \xi_2^t)$ , für das die Mengen  $P_K(x(t)) \cap K_\varepsilon$  als auch  $P_K(x(t)) \cap K'_\varepsilon$  nicht leer sind. In der Tat erfüllt

$$\xi_2^t = \inf \{ \xi_2 : P_K((t, \xi_2)) \subset K_\varepsilon \}$$

die Bedingung.

Wir haben mit  $[0, T] \ni t \mapsto x(t)$  in  $\mathbb{R}^2$  eine Funktion mit Werten in  $\mathbf{N}_K$  definiert, die die Elemente in  $\mathbf{F}_K \cap b_\delta(x_0)$  mit  $\xi_1$ -Koordinate in  $[0, T]$  enthält. Wir zeigen, daß sie lipschitzstetig ist.

Für ein  $x \in b_\delta(x_0)$  und ein  $k \in K_\varepsilon \cup K'_\varepsilon$  sei  $s(x, k)$  die Steigung der Tangente an  $b_{|x-k|}(k)$  im Punkte  $x$ . Zum vorgegebenen  $\varepsilon$  und gewählten  $\delta$  existiert ein  $M \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , so daß

$$|s(x, k)| \leq M$$

für alle  $x \in b_\delta(x)$  und  $k \in K_\varepsilon \cup K'_\varepsilon$ . Seien  $t, t' \in [0, T]$ ,  $t \neq t'$  und sei  $d_K(x(t)) \leq d_K(x(t'))$ . Für jedes  $k \in P_K(x(t))$  gilt  $x(t) \in \bar{b}_{|x(t')-k|}(k)$ . Dann liegt  $x(t)$  insbesondere in dem Halbraum, der diese Kugel enthält und von der Stützgeraden im Punkte  $x(t')$  begrenzt wird. Und da  $x(t)$  in  $K_\varepsilon$  als auch  $K'_\varepsilon$  Elemente bester Approximation besitzt, folgt

$$\left| \frac{\xi_2(t) - \xi_2(t')}{t - t'} \right| \leq \sup_{k \in K_\varepsilon \cup K'_\varepsilon} |s(x(t'), k)| \leq M.$$

Wir können den Beweis wie folgt zusammenfassen:

**8.1.** Sei  $x_0 \in \mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$ . Dann existiert eine Umgebung  $\mathbf{O}$  von  $x_0$  und eine lipschitzstetige Kurve in  $\mathbf{N}_K$ , die die Punktmenge  $\mathbf{F}_K \cap \mathbf{O}$  enthält.

Da  $K$  kompakt ist, ist  $\mathbf{F}_{K,n} = \{x \in \mathbf{F}_K : d_K(x) \geq 1/n\}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine kompakte Teilmenge in  $\mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$ . Nach der voranstehenden Aussage läßt sich  $\mathbf{F}_{K,n}$  von endlich vielen rektifizierbaren Kurvenstücken in  $\mathbf{N}_K$  überdecken. Und wegen  $\mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{F}_{K,n}$  gilt

**8.2. SATZ.**  $\mathbf{N}_K \cap \mathbf{F}_K$  ist in einer abzählbaren Vereinigung von lipschitzstetigen Kurvenstücken in  $\mathbf{N}_K$  enthalten.

Schließlich zusammen mit Satz 6.2 als Verschärfung von Aussage 1.4

**8.3. SATZ.**  $\mathbf{N}_K$  läßt sich als abzählbare Vereinigung von rektifizierbaren Kurvenstücken darstellen.

$\mathbf{N}_K$  ist eine Menge von erster Kategorie in  $\mathbb{R}^2$ , dies folgt schon aus Aussage 1.4, aber auch aus der Tatsache, daß  $\mathbf{E}_K$  eine dichte  $G_\delta$ -Menge in

$\mathbb{R}^2$  ist.  $N_K$  läßt sich, wie gezeigt, als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen darstellen. Daß  $N_K$  nicht selbst nirgends dicht zu sein braucht, zeigt das abschließende

**8.4. BEISPIEL.** Sei  $O$  eine offene, beschränkte und konvexe Teilmenge im  $\mathbb{R}^2$ , deren Randkurve in einer dichten Teilmenge nicht differenzierbar ist. (Eine solche Menge läßt sich leicht konstruieren.) Ist  $K = \partial O$ , dann gilt  $N_K \subset O \subset \overline{N_K}$ .

Da  $O$  konvex ist, ist offenkundig  $N_K \subset O$ . Angenommen  $E_k^0 \cap O \neq \emptyset$ . Sei  $V$  eine Zusammenhangskomponente in  $E_k^0 \cap O$ . Da  $P_K$  stetig auf  $E_K$  ist, ist auch  $P_K(V)$  zusammenhängend. Weiter darf  $P_K(V)$  keine Nichtdifferenzationspunkte von  $K$  enthalten,  $P_K(V)$  muß folglich einpunktig sein, sagen wir  $P_K(V) = \{k\}$ . Sei  $g$  die eindeutige Stützgerade an  $K$  im Punkte  $k$ ; aus  $V \subset k + g^\perp$ , der Normalen von  $g$  im Punkte  $k$ , erhalten wir einen Widerspruch zur Offenheit von  $V$ .

#### LITERATUR

1. R. D. ANDERSON AND V. L. KLEE, JR., Convex functions and upper semi-continuous collections, *Duke Math. J.* **19** (1952), 349–357.
2. E. ASPLUND, Chebyshev sets in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **144** (1969), 236–240.
3. H. BERENS, Best approximation in Hilbert space, in "Approximation Theory III" (E. W. Cheney, Eds.), pp. 1–20, Academic Press, New York, 1980.
4. H. BREZIS, "Opérateurs Maximaux Monotones," Mathematics Studies Vol. 5, North-Holland, Amsterdam/London, 1973.
5. L. CALABI, A Study of the Skeleton of Plane Figures, PML No. 60429, SR-2, June 1965.
6. L. CALABI AND W. E. HARTNETT, A Motzkin-type theorem for closed nonconvex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), 1495–1498.
7. P. ERDÖS, Some remarks on the measurability of certain sets, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 728–731.
8. H. FEDERER, Curvature measures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959), 418–491.
9. TH. MOTZKIN, Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **21** (1935), 562–567.
10. TH. MOTZKIN, Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **21** (1935), 773–779.
11. CHR. PAUC, Contribution au problème de M. Fréchet relatif à la recherche d'une paramétrisation dérivable pour les courbes douées d'une tangente en tout point, *C. R. Acad. Sci. Paris* **207** (1938), 1154–1157.
12. CHR. PAUC, Considérations sur la surface représentative de la distance d'un point à un ensemble ponctuel plan, *La Rev. Sci.* **77** (1939), 493–496.
13. D. G. PAULOVICH, Trees are contractible, *Proc. Amer. Math. Soc.* **84** (1982), 429–432.
14. L. E. WARD, A note on dendrites and trees, *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954), 992–994.